Теорія ймовірності
Шамін Денис (ЕФ)
група Масютки

5.1 ; 5.6 (б, г) 5.7 ; 5.8 ; 5.14 б ; 5.16 б ;
5.18 ; 5.21

5.1 Тричі підкидають гральний кубик. Нехай ξ - число появ шісток. Знайти закон розподілу.

$x_1 = 0$ - при трьох підкиданнях шістка не випала ні разу
$x_2 = 1$ - при трьох підкиданнях шістка випала один раз
$x_3 = 2$ - при трьох підкиданнях шістка випала два раза
$x_4 = 3$ - при трьох підкиданнях шістка випала три раза

Тепер треба обчислити ймовірність появи цих подій:

$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$; $n = 3$, $m = 0, 1, 2, 3$

$p = \frac{1}{6}$ ймовірність випадіння

$q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$P_3^0 = C_3^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P_3^1 = C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$$

$$P_3^2 = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{72}$$

$$P_3^3 = C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$$

$$\frac{125}{216} + \frac{25}{72} + \frac{5}{72} + \frac{1}{216} = 1$$

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

N 5.6 (б, г) $(0 < p < 1)$ $q = 1 - p$

б) $p^{k-n} q$; $k = n, n+1, \ldots$

це дискретний розподіл, а саме біноміальний

г) $\frac{2^k e^{-2}}{k!}$ $k = 0, 1$

це розподіл Пуассона

5.7

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & -1 < x \le \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

а) $$F(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ x, & -1 < x \le \frac{1}{3} \\ 0, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

б) $P\{-\frac{1}{2} < \xi < 8\} = F(8) - F(-\frac{1}{2}) = \frac{27}{4} - \frac{3}{8} = \frac{51}{8}$.

в) $P\{\xi > -\frac{1}{2}\} = \frac{3}{4} 1 + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ взяв випадкове число більше $-\frac{1}{2}$.

5.8

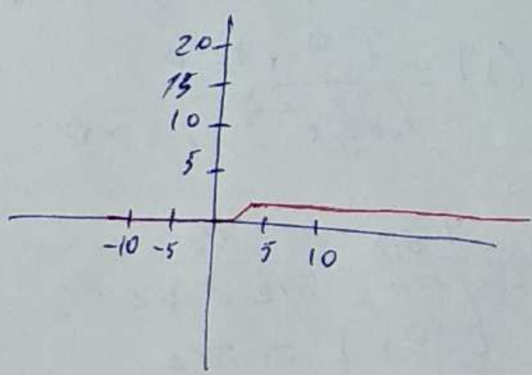
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \le 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

$f(x) = \int\limits_{-8}^{x} f(x)dx$;

$f(x) = \int\limits_{-8}^{1} 0 dx = 0, \quad x \le 1$

$f(x) = \int\limits_{1}^{x} 1 dx = x - 1, \quad 1 < x \le 2$

$f(x) = 1, \quad x > 2$



5.14 (1)

а) $\eta_1 = 3\xi - 2 \quad [0, 1]$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

η_1 - неперервна; $F_{\eta_1}(x) = P\{\eta_1 < x\} = P\{3\xi - 2 < x\} =$

$$= P\left\{\xi < \frac{x+2}{3}\right\} = F_\xi\left(\frac{x+2}{3}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{x+2}{3} \le 0, \Rightarrow x \le -2 \\ \frac{x+2}{3}, & \frac{x+2}{3} \in (0, 1), \\ 1, & \frac{x+2}{3} > 1 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & x \in (0, 1) \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$F_{\eta_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \frac{x+2}{3}, & x \in (-2, 1) \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$p_{\eta_1} = (F_{\eta_1})' = \begin{cases} 1/3, & x \in (-2, 1) \\ 0, & x \notin (-2, 1). \end{cases}$$

5.16 (б)

б) $\eta_2 = |\xi|$

$$F_{\eta_2} = P\{\eta_2 < x\} = P\{|\xi| < x\} = P\{-x < \xi < x\} = \Phi(x) - \Phi(-x) =$$

$$= \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1,$$

$$F_{\eta_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 2\Phi(x) - 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$p_{\eta_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0 \end{cases}$$

5.18

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\pi/2 \\ 1/\pi, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & x \ge \pi/2 \end{cases}$$

$y = \sin x$

$$F(y) = P(Y < y) = P(\sin X < y) = P(X < \arcsin y) = \int_{-\infty}^{\arcsin y} f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\pi/2} f(x)dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y} \frac{dx}{\pi} = 0 + \frac{x}{\pi}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin y;$$

$g(y) = F'(y)$

$$g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

5.21